Криковцева Настя,
107 группа, тел. 328-69-84
8-916-125-87-11

физики
ботва

Курс лекций по высшей математике для студентов-биологов
Часть II

Ю.Н.Сударев

Москва, 2003

Оглавление

Глава 1

Интегральное исчисление.

1.1 Неопределённый интеграл.

Определение 1.1 ***Первообразной*** *для функции* $f(x)$ *на промежутке* $\langle a, b\rangle$ *называется функция* $F(x)$ *такая, что на всём* $\langle a, b\rangle$ *выполняется соотношение*

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Сразу возникает вопрос о существовании и единственности такой первообразной.

Что касается существования, то, как мы увидим далее, оно гарантировано для непрерывных функций $f(x)$. Единственность же, очевидно, нет, так как, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и $F(x)+C$ при любом C — тоже первообразная, ибо

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Верно и обратное утверждение.

Если $F_1(x)$ — ещё одна первообразная для $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$, то существует такая постоянная C, что на $\langle a, b\rangle$ справедливо соотношение

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1.2}$$

Действительно, рассмотрим функцию $g(x) = F_1(x) - F(x)$. Очевидно,

$$g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Тогда, по следствию из теоремы Лагранжа, $g(x) = C$ на $\langle a, b\rangle$, откуда и следует (1.2).

Подчеркнём, что этот результат справедлив именно на **промежутке**, а не на каком-либо ином множестве.

Определение 1.2 *Произвольная первообразная для* $f(x)$ *называется* ***неопределённым интегралом*** *и обозначается* $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.3}$$

Легко доказываются следующие две формулы:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \tag{1.4}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Действительно, пусть, например, $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$. Тогда

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x),$$

что равносильно формуле (1.5).

Заметим, что, поскольку неопределённым интегралом мы назвали произвольную первообразную, то равенства (1.4) и (1.5) следует понимать так, что они имеют место для любых первообразных с точностью до постоянного слагаемого.

Уже сейчас, имея таблицу производных, мы можем, обращая её, выписать ряд табличных интегралов.

$$\begin{aligned}
&1.\ \int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (p \neq -1).\\
&2.\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.\\
&3.\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1),\\
&\quad\ \int e^x\,dx = e^x + C.\\
&4.\ \int \cos x\,dx = \sin x + C.\\
&5.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + c.\\
&6.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.\\
&7.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.\\
&8'.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.\\
&9'.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Замечание 1. Данные формулы справедливы на любом промежутке, на котором существует левая и правая части равенств.

Замечание 2. Последние две формулы отмечены номерами со штрихами, так как вскоре мы заменим их более общими формулами.

Пример.

$$\int (x\sqrt{x} - \frac{2}{x})\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2\ln|x| + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\ln|x| + C.$$

Однако, формул (1.4), (1.5) явно недостаточно для вычисления сколь - нибудь сложного интеграла. Поэтому нам придётся установить ещё некоторые, более сложные, свойства интеграла. Одно из важнейших свойств устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.1 *Пусть* $f(u)$ *непрерывна на промежутке* $\langle a, b\rangle$, $\varphi(x)$ *непрерывна и имеет непрерывную производную на промежутке* $\langle \alpha, \beta\rangle$, *причём* $\varphi(x) \in \langle a, b\rangle$ *для любого* $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$. *Тогда, если*

$$\int f(u)\,du = F(u) + C, \tag{1.7}$$

то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Действительно, оба интеграла в (1.7) существуют, так как подинтегральные функции непрерывны. Далее, по правилу дифференцирования сложной функции мы имеем

$$\frac{d}{dx}F[\varphi(x)] = F'_u[\varphi(x)]\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

что и доказывает наше утверждение.

Эта теорема носит название **метода подстановки или метода замены переменной** в неопределённом интеграле. Последнюю формулу в (1.7) можно записать в более наглядном виде

$$\int f(u(x))\,du(x) = F(u(x)) + C. \tag{1.8}$$

С помощью этого метода, имея один табличный интеграл,мы можем вычислить много других интегралов.

Пример.
$$\int e^{x^3}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,dx^3 = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Отметим, что под знаком неопределённого интеграла стоит дифференциал первообразной, с которым можно обращаться по правилам действия с дифференциалом.

Вычислим теперь несколько новых табличных интегралов.

Рассмотрим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad \text{где} \qquad a > 0.$$

Имеем,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = au \\ dx = adu \end{array} \right| = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Таким образом, мы заносим в таблицу интеграл

$$8. \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0).$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$9. \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0).$$

Далее,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a} \int \frac{(a+x) + (a-x)}{(a+x)(a-x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x} \right) = \frac{1}{2a} \left(\ln|a+x| - \ln|a-x| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Итак, мы получили табличный интеграл

$$10. \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \qquad (a > 0).$$

(Этот интеграл на неофициальном математическом языке называется „ высоким логарифмом“.)

Вычислим теперь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}, \text{ где } A \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \left| \begin{array}{c} x + \sqrt{x^2 + A} = u \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{du}{u} \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

Занесём в таблицу интеграл

$$11. \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln|x+\sqrt{x^2+A}|+C \qquad (A \neq 0).$$

(Этот интеграл называется на жаргоне „ длинным логарифмом“.)

Нам осталось добавить в нашу таблицу ещё два интеграла, которые мы сейчас и вычислим.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Итак, мы завершаем нашу таблицу интегралов.

$$12. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$13. \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Существует ещё один специальный метод интегрирования, который называется **интегрированием по частям**.

Теорема 1.2 *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ $\in$ $C'(\langle a,b\rangle)$ *(т. е. сами непрерывны и имеют непрерывную производную на* $\langle a,b\rangle$ *). Тогда*

$$\int v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \tag{1.9}$$

Действительно,

$$\Big(u(x)v(x)\Big)' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{1.10}$$

Все функции, участвующие в (1.10), непрерывны, следовательно, имеют первообразную. Отсюда

$$\int \Big(u(x)v(x)\Big)' = \int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx \tag{1.11}$$

Заметим теперь, что одной из первообразных для $\Big(u(x)v(x)\Big)'$, очевидно, является $u(x)v(x)$. Тогда из (1.11) и вытекает (1.9).

Формулу (1.9) можно записать в более наглядной форме:

$$\int v(x)\,du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)\,dv(x) \tag{1.12}$$

Данный метод имеет значительно более узкую область применения, чем метод замены переменной, зато в этой узкой области он незаменим.

Примеры.

$$\int e^x x\,dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2 \sin x - \int \sin x\, d(x^2) =$$
$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx = x^2 \sin x + 2\int x\,d\cos x =$$
$$= x^2 \sin x + 2(x\cos x - \int \cos x\,dx) =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

В последнем случае мы дважды применили формулу (1.12).

1.2 Определённый интеграл.

Наряду с неопределённым интегралом, о котором речь шла в предыдущем параграфе, существует ещё и другой тип интеграла, называемый **определённым интегралом**, который, на первый взгляд, ничего общего не имеет с интегралом неопределённым и лишь в дальнейшем выясняется их глубокая внутренняя взаимосвязь.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Разобъём этот отрезок на более мелкие части **конечным** числом точек x_i , так что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b. \tag{1.13}$$

Множество точек x_i назовём **разбиением** отрезка и обозначим кратко буквой T .

Введём далее величины

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{и} \quad \lambda(T) = \max_i \Delta x_i. \tag{1.14}$$

Δx_i — это длина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, а число $\lambda(T)$ мы назовём **диаметром** разбиения T .

На каждом из маленьких отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму по всем отрезкам

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.15}$$

Эту сумму мы назовём **интегральной суммой** для функции $f(x)$ (соответствующей разбиению T и выбору промежуточных точек ξ_i).

Определение 1.3 *Число J называется пределом интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю, если*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall T: \quad \lambda(T) < \delta \ \textit{при любых}\ \{\xi_i\},$$
$$\textit{выполняется неравенство}\ \Big|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\Big| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Кратко (1.16) мы записываем так

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = J. \tag{1.17}$$

Этот новый тип предела обладает свойствами, аналогичными тем, что выполнялись для предела последовательности и предела функции. (Например, справедливы теоремы о пределе суммы, о переходе к пределу в неравенствах и т. п.) Этот предел мы назовём **определённым интегралом** от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и будем обозначать

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1.18}$$

Обозначение (1.18) аналогично тому, которое мы использовали для неопределённого интеграла, однако, в отличие от неопределённого интеграла, (1.18) не функция, а число. Поэтому в (1.18) вместо x мы можем использовать любую другую букву, отчего значение интеграла не изменится. Так,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(u)\,du = \int\limits_a^b f(t)\,dt \quad \text{и т. д.}$$

Почему же для совершенно другого объекта мы выбрали обозначение столь похожее на то, что мы использовали для неопределённого интеграла? Это станет понятно в дальнейшем, когда мы научимся вычислять определённый интеграл с помощью неопределённого.

Разумеется, определённый интеграл существует не для всякой функции $f(x)$. Если интеграл существует, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a,b]$.

Установим теперь некоторые свойства определённого интеграла.

Теорема 1.3 *Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то справедливы следующие равенства*

$$\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{1.19}$$

$$\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

причём, существование интегралов, стоящих слева в (1.19), гарантируется.

Докажем, например, второе из равенств (1.19). Выбрав произвольное разбиение T отрезка $[a,b]$ и произвольные промежуточные точки ξ_i, составим интегральную сумму для функции $f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$\sum_i [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \tag{1.20}$$

Но при $\lambda(T) \to 0$ первое слагаемое в правой части (1.20) стремится к $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а второе — k $\int\limits_a^b g(x)\,dx$. По теореме о пределе суммы

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

что равносильно второму равенству (1.19).

Теорема 1.4 *Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля на $[a,b]$ лишь в конечном числе точек. Тогда она интегрируема на $[a,b]$ и интеграл от неё равен нулю.*

Действительно, пусть $f(x) \neq 0$ лишь в k точках на $[a,b]$. Тогда она ограничена на $[a,b]$:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant M. \tag{1.21}$$

(В качестве M можно взять максимальный модуль значений $f(x)$ в тех точках, где $f(x) \neq 0$.)

Возьмём теперь произвольную интегральную сумму для $f(x)$. Очевидно, выполняется следующая оценка

$$0 \leqslant \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant 2kM\lambda(T) \tag{1.22}$$

(В правой части (1.22) стоит $2k$ потому,что каждая точка ξ_i может участвовать дважды в интегральной сумме, если она является границей двух маленьких отрезков.)

Устремим теперь $\lambda(T)$ к нулю. Тогда из (1.22) по теореме о „зажатой переменной“ мы получим, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = 0,$$

что равносильно утверждению теоремы.

Теорема 1.5 *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а $g(x)$ определена на $[a,b]$ и отлична от $f(x)$ лишь в конечном числе точек. Тогда $g(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{1.23}$$

Действительно, представим $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = f(x) + [g(x) - f(x)] \tag{1.24}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках, отлична от нуля лишь в конечном числе точек, откуда в силу теоремы 1.4 следует, что она интегрируема и интеграл от неё равен нулю. Функция $f(x)$ интегрируема по условию. Тогда из второго равенства (1.19) следует (1.23).

Замечание. Таким образом, интеграл оказывается нечувствительным к изменению функции в конечном числе точек. Это новое свойство, которым не обладает ни одна из операций, изученных нами ранее.

Теорема 1.6 (необходимый признак интегрируемости) . *Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нём, т.е.*

$$\exists\, C > 0 : \forall\, x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C.$$

Предположим, что это не так, т.е. что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, но при этом принимает сколь угодно большие по модулю значения. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда в силу (1.16)

$$\begin{gathered} \exists\, \delta : \forall\, T : \lambda(T) < \delta \quad \forall \{\xi_i\} \\ \Big|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - J\Big| < 1, \end{gathered} \tag{1.25}$$

или

$$J - 1 < \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i < J + 1. \tag{1.26}$$

Выберем какое-нибудь разбиение T, удовлетворяющее (1.25), и фиксируем его. Поскольку $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, то она не ограничена хотя бы на одном маленьком отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, входящем в T. Фиксируем теперь все точки ξ_i на остальных маленьких отрезках $[x_{i-1}, x_i]$. Теперь все слагаемые суммы из (1.26) фиксированы, кроме $f(\xi_k)\Delta x_k$. Но на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция $f(x)$ не ограничена, значит, можно сделать величину $f(\xi_k)\Delta x_k$ сколь угодно большой по модулю за счёт выбора ξ_k. Вместе с этим слагаемым станет сколь угодно большой по модулю и вся интегральная сумма, что противоречит (1.26). Это противоречие и доказывает справедливость нашей теоремы.

Из простейших свойств интеграла отметим ещё одно. Пусть $f(x) \equiv C$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a). \tag{1.27}$$

В самом деле, любая интегральная сумма для такой функции равна

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i C\Delta x_i = C\sum_i \Delta x_i = C(b-a).$$

Таким образом, все интегральные суммы равны одному и тому же числу, а значит, их предел равен тому же числу.

Перейдём теперь к весьма непростому вопросу о **существовании** определённого интеграла. В самом деле, как описать все интегрируемые функции? Выше мы видели, что неограниченные функции заведомо не интегрируемы. Однако, как показывает следующий пример, ограниченность функции на отрезке ещё не гарантирует её интегрируемость.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ так называемую функцию Дирихле $D(x)$, которая принимает значение 1 во всех рациональных точках (т.е. в точках вида $x = \frac{m}{n}$, где m, n — целые числа) и равна нулю во всех иррациональных точках. Известно, что на любом сколь угодно малом отрезке существует бесконечно много как рациональных, так и иррациональных точек. Если теперь мы в качестве точек ξ_i возьмём только рациональные точки, то интегральная сумма при любом разбиении будет равна

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а если все ξ_i — иррациональны, то

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, ясно, что интегральные суммы не могут иметь общий предел при $\lambda(T) \to 0$ и, следовательно, $D(x)$ не интегрируема на $[0,1]$, хотя очевидно, ограничена на этом отрезке.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции на отрезке установил французский математик А. Лебег. Однако, для того, чтобы понять его, необходимо познакомиться с некоторыми новыми понятиями.

Прежде всего, рассмотрим произвольную числовую последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1.28}$$

Можно ли придать смысл сумме **всех** её членов и как это сделать? Образцом при этом служит хорошо известная из школьной программы бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Рассмотрим так называемую **частичную** **сумму** последовательности (1.28)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.29}$$

Назовём суммой всех членов данной последовательности предел S_n при $n \to \infty$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{1.30}$$

В школе такой предел вычисляется для бесконечно убывающей геометрической прогрессии и называется суммой этой прогрессии.

Разумеется, такой предел существует далеко не всегда. Например, если мы рассмотрим последовательность

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \quad , \tag{1.31}$$

то для неё $S_n = n$, и, следовательно, у (1.31) нет суммы всех членов.

Определение 1.4 *Множество* **A** *называется* ***счётным****, если можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и множеством натуральных чисел.*

Это означает, что можно так сопоставить элементам **A** натуральные числа, что каждому элементу из **A** будет соответствовать ровно одно натуральное число и каждому натуральному числу будет соответствовать ровно один элемент из **A** . Проще говоря, счётными будут те множества, элементы которых можно перенумеровать. **Бесконечные** множества, которые не являются счётными, носят название **несчётных** множеств.

Очевидно, что само множество натуральных чисел является счётным. (Каждому элементу такого множества надо сопоставить этот же элемент.)

Гораздо менее очевидно, что счётным является и множество рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$. А вот множество чисел, образующих отрезок $[a, b]$ — это несчётное м ножество. Его элементы, в принципе, невозможно перенумеровать, так как оно содержит слишком много элементов, на которые, так сказать, „ не хватает“ натуральных чисел.

Введем теперь ещё одно важное и непростое понятие **множества меры нуль**.

Рассмотрим некоторое множество **A** и произвольную систему интервалов $\{J = (\alpha, \beta)\}$ (конечную или бесконечную).

Определение 1.5 *Система интервалов* $\{J\}$ *образует* ***покрытие*** *множества* **A** , *если каждый элемент из* **A** *принадлежит хотя бы одному интервалу из этой системы.*

Определение 1.6 *Множество* **A** *называется* ***множеством меры нуль****, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует не более, чем счётная система интервалов* $\{J_n\}$, *покрывающая это множество, сумма длин которых меньше* ε .

Слова „ не более,чем“ означают,что система $\{J_n\}$ либо конечна, либо счётна.

Отметим также, что множество меры нуль само вовсе не обязательно будет счётным. Существуют и несчётные множества меры нуль.

Попытка представить себе „ по-простому“, как выглядят все множества меры нуль, заведомо обречена на провал, поскольку математики обнаружили такие „ хитроумные“ множества этого типа, о существовании которых никто даже и не подозревал.

Наша задача гораздо более скромна: нам нужно установить несколько простых свойств таких множеств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1.7 *Всякое подмножество множества меры нуль само является множеством меры нуль.*

Это очевидно следует из определения (1.6) и того факта, что любое покрытие множества $\mathbf{A}$ интервалами является одновременно и покрытием любого подмножества из $\mathbf{A}$.

Теорема 1.8 *Объединение двух множеств меры нуль является также множеством меры нуль.*

Действительно, пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — множества меры нуль. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и поделим его пополам. В силу определения (1.6) для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует не более, чем счётная система интервалов $\{J_n\}$, покрывающая $\mathbf{A}$ и такая, что

$$\sum_n |J_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.32}$$

где $|J_n|$ —длина интервала J_n.

Аналогично, для $\mathbf{B}$ существует такая систеиа интервалов $\{J'_n\}$, покрывающая $\mathbf{B}$ и такая,что

$$\sum_n |J'_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.33}$$

Заметим теперь,что система интервалов

$$J_1, J'_1, J_2, J'_2, \ldots, J_n, J'_n, \ldots \tag{1.34}$$

не более, чем счётна, покрывает объединение $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, а сумма длин системы (1.34) меньше ε:

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |J'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ выполнены все условия определения (1.6), т.е. это множество есть множество меры нуль.

Последовательно применяя теорему (1.8), мы получим, что объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Очевидно, множество, состоящее из одной точки x_1, является множеством меры нуль, поскольку его можно покрыть одним интервалом сколь угодно малой длины. В силу вышесказанного любое конечное множество точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть множество меры нуль.

Заметим, что теорема (1.8) обобщается на случай объединения счётного числа множеств $\mathbf{A}_i$, хотя мы и не приводим здесь доказательства этого факта.

Отсюда следует, например, что множество всех рациональных чисел есть тоже множество меры нуль. Отметим также, что в математике принято соглашение, по которому пустое множество (т.е. множество, не содержащее ни одного элемента) считается множеством меры нуль.

Если множество $\mathbf{A}$ имеет меру нуль, то мы будем записывать это так: $\mu(\mathbf{A}) = 0$.

Наконец, мы можем сформулировать критерий интегрируемости функций.

Теорема 1.9 (критерий Лебега) . *Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на этом отрезке и множество её точек разрыва имело меру нуль.*

Доказательство этой теоремы чрезвычайно сложно и в нашу программу не входит, хотя мы сможем успешно использовать её при установлении нужных нам результатов.

Теорема 1.10 *Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на нём.*

Действительно, из непрерывности функции на отрезке вытекает её ограниченность на нём, а множество её точек разрыва пусто, т.е. имеет меру нуль. Отсюда по критерию Лебега и следует интегрируемость.

Теорема 1.11 *Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на нём.*

В самом деле, по критерию Лебега из интегрируемости $f(x)$ и $g(x)$ вытекает их ограниченность на $[a,b]$ и то, что множество точек разрыва каждой из них имеет меру нуль:

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leqslant C_1, \quad |g(x)| \leqslant C_2 \quad \forall x \in [a,b]; \\ &\mu(\mathbf{A}) = 0, \quad \mu(\mathbf{B}) = 0, \end{aligned} \tag{1.35}$$

где под $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ подразумевается множество точек разрыва, соответственно, $f(x)$ и $g(x)$.

Отсюда следует, что $|f(x)g(x)| \leqslant C_1C_2$, т.е. ограниченность $f(x)g(x)$ на $[a,b]$.

Далее, если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x, то их произведение также непрерывно в этой точке. Поэтому каждая точка разрыва произведения $f(x)g(x)$ принадлежит, по крайней мере, одному из множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Значит,

$$\mathbf{C} \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}, \tag{1.36}$$

где $\mathbf{C}$ — множество точек разрыва $f(x)g(x)$.

В силу теорем (1.7) и (1.8) из (1.36) следует, что

$$\mu(\mathbf{C}) = 0.$$

Таким образом, выполнены все условия критерия Лебега, откуда и вытекает утверждение нашей теоремы.

Теорема 1.12 *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$, *то её модуль* $|f(x)|$ *интегрируем на* $[a,b]$.

Действительно, ограниченность модуля $|f(x)|$ на $[a,b]$ очевидна в силу ограниченности $f(x)$, вытекающей из критерия Лебега. Поскольку каждая точка разрыва $|f(x)|$ является одновременно, по свойствам модуля, и точкой разрыва $f(x)$, то, как и в теореме (1.11), отсюда следует, что множество точек разрыва $|f(x)|$ имеет меру нуль. Отсюда по критерию Лебега и следует интегрируемость $|f(x)|$ на $[a,b]$.

Из теоремы (1.12) вытекает, что произведение любого **конечного** числа интегрируемых на $[a,b]$ функций само интегрируемо на $[a,b]$.

Теорема 1.13 *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$, *то она интегрируема на любом отрезке* $[\alpha,\beta]$, *содержащемся в* $[a,b]$.

В самом деле, по критерию Лебега из интегрируемости функции $f(x)$ на $[a,b]$ следует её ограниченность на этом отрезке и то, что множество её точек разрыва имеет меру нуль. Отсюда очевидно вытекает, что теми же свойствами она обладает и на отрезке $[\alpha,\beta]$, что, в силу критерия Лебега, доказывает утверждение нашей теоремы.

Теорема 1.14 (интегрирование неравенств) . *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$ *и на этом отрезке выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \tag{1.37}$$

Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a,b]$ и выберем произвольные промежуточные точки $\{\xi_i\}$. Тогда очевидно справедливо соотношение

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_i g(\xi_i)\Delta x_i \,. \tag{1.38}$$

Устремляя диаметр разбиения $\lambda(T)$ к нулю, по теореме о переходу к пределу в неравенстве мы из (1.38) получаем (1.37).

Следствие 1.14.1 *Если* $g(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *и* $g(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0 \,. \tag{1.39}$$

Для доказательства (1.39) достаточно положить $f(x) \equiv 0$ в (1.37).

Следствие 1.14.2 *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *и*

$$A \leqslant f(x) \leqslant B \quad \text{на} \quad [a,b]\,,$$

то

$$A(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant B(b-a)\ . \tag{1.40}$$

Задача.

Доказать, что для любой интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ справедливо соотношение

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \tag{1.41}$$

Утверждение вытекает из теоремы (1.14) и равенства (1.27).

Теорема 1.15 (теорема о среднем) . *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *;*
2. $g(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *;*
3. $g(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b]$ *.*
Тогда $\exists c \in [a,b]$ *:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx\ . \tag{1.42}$$

Из условий теоремы очевидно следует интегрируемость $f(x)g(x)$ на $[a,b]$. По свойствам функций, непрерывных на отрезке,

$$\forall x \in [a,b]\ :\quad m \leqslant f(x) \leqslant M\ , \tag{1.43}$$

где m и M , соответственно, минимум и максимум $f(x)$ на $[a,b]$. В силу неотрицательности $g(x)$ из (1.43) вытекает неравенство

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)\ . \tag{1.44}$$

По теореме (1.14)

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx\ . \tag{1.45}$$

По следствию (1.14.1) из теоремы (1.14)

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \geqslant 0\ . \tag{1.46}$$

Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, тогда из (1.45) следует, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0\ .$$

Следовательно, соотношение (1.42) выполняется при любом c.

Пусть далее $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$. Поделим все части неравенства (1.45) на этот интеграл

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant M\ . \tag{1.47}$$

По теореме о промежуточных значениях для непрерывной на отрезке функции $f(x)$

$$\exists\, c \in [a,b]\ :\qquad \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} = f(c)\ ,$$

откуда и вытекает (1.42).

Если в (1.42) положить $g(x) \equiv 1$, то мы получим

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\ . \tag{1.48}$$

Величина, стоящая в правой части (1.48), называется **средним значением** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, откуда и происходит название теоремы.

Заметим, что если условие (3.) теоремы (1.15) заменить на $g(x) \leqslant 0$, то равенство (1.42) останется справедливым, что станет очевидным, если мы умножим верное соотношение

$$\int\limits_a^b f(x)[-g(x)]\,dx = f(c)\int\limits_a^b [-g(x)]\,dx$$

на (-1) .

Теорема 1.16 *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$. *Тогда для произвольного числа* $c \in (a,b)$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx\ . \tag{1.49}$$

Действительно, в силу теоремы (1.13) все интегралы, участвующие в (1.49), существуют. Выберем теперь произвольное разбиение T_1 отрезка $[a,c]$ с диаметром $\lambda(T_1)$ и произвольный набор промежуточных точек $\{\xi_i'\}$. Аналогично, на отрезке $[c,b]$ выберем разбиение T_2 с диаметром $\lambda(T_2)$ и промежуточные точки $\{\xi_i''\}$. Объединяя разбиения T_1 и T_2, мы получим разбиение T отрезка $[a,b]$, а объединяя $\{\xi_i'\}$ и $\{\xi_i''\}$ — набор промежуточных точек $\{\xi_i\}$ на $[a,b]$. Очевидно,

$$\lambda(T) = \max\{\lambda(T_1), \lambda(T_2)\} . \tag{1.50}$$

Соответствующая интегральная сумма на $[a,b]$ равна

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_i f(\xi_i')\Delta x_i + \sum_i f(\xi_i'')\Delta x_i , \tag{1.51}$$

где слагаемые в правой части — это суммы на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно.

Устремим теперь $\lambda(T)$ к нулю. Из (1.50) следует, что $\lambda(T_1) \to 0$ и $\lambda(T_2) \to 0$. Тогда все слагаемые в (1.51) стремятся к соответствующим интегралам, откуда и следует (1.49).

До сих пор мы рассматривали интеграл по отрезку $[a,b]$, где $a < b$. Однако, полезно расширить понятие интеграла на случай произвольного соотношения между a и b, причём так, чтобы нужные свойства интеграла сохранялись. Для этого мы положим **по определению**

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 ;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (a > b) . \tag{1.52}$$

Мы можем утверждать теперь, что формула (1.49) сохраняется при произвольном соотношении между a, b и c. Здесь возникает много возможных случаев. Возьмём, например, один из них, а именно: $a < b < c$. Докажем справедливость формулы (1.49) для этого случая.

В силу теоремы (1.16) (с естественным переобозначением **пределов интегрирования**, т.е. чисел a, b и c) мы получим

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx . \tag{1.53}$$

Учитывая , что $\int\limits_b^c f(x)\,dx = -\int\limits_c^b f(x)\,dx$, и перенося второе слагаемое в правой части (1.53) в другую сторону равенства, мы и получим (1.49).

Аналогично формула (1.49) подтверждается и во всех остальных возможных случаях.

Ранее мы получили ряд соотношений для интегралов, в одних из которых участвует знак равенства, а в других — знак неравенства. Какие из этих соотношений останутся справедливыми при нашем новом, расширенном, понимании интеграла? Легко убедиться, что все соотношения, содержащие знак равенства, остаются в силе, тогда как формулы, где фигурирует неравенство, будут справедливы только, если нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Перейдём теперь к важнейшим теоремам, связанным со свойствами интеграла **как функции верхнего предела.**

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Возьмём произвольную точку $x \in [a,b]$ и рассмотрим новую функцию $F(x)$, задаваемую формулой

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ . \tag{1.54}$$

(Здесь мы обозначили переменную интегрирования буквой t, поскольку определённый интеграл не зависит от её обозначения, а буква x уже занята.)

В силу теоремы (1.13) интеграл (1.54) существует при любом $x \in [a,b]$. Наша задача состоит в том, чтобы выяснить свойства функции $F(x)$ при различных условиях, накладываемых на $f(x)$.

Теорема 1.17 *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.*

Выберем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и составим приращение ΔF в этой точке.

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\ . \tag{1.55}$$

Пусть теперь $\Delta x > 0$. Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нём :

$$\exists\, C > 0\ :\quad \forall\, x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C\ . \tag{1.56}$$

Тогда из (1.55) и (1.56) мы получим

$$|\Delta F| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} C\,dt =$$

$$= C(x_0+\Delta x - x_0) = C\Delta x = C|\Delta x|\ . \tag{1.57}$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$|\Delta F| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\right| = \left|-\int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} |f(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} C\,dt = C(-\Delta x) = C|\Delta x|\,. \qquad (1.58)$$

Таким образом, из (1.57) и (1.58) следует, что при любом знаке Δx справедливо неравенство

$$0 \leqslant |\Delta F| \leqslant C|\Delta x|\,. \qquad (1.59)$$

(Разумеется, мы берём Δx таким, чтобы не выйти за пределы отрезка $[a, b]$.)

Из (1.59) по теореме о „ зажатой переменной“ мы находим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0\,,$$

а это и означает непрерывность $F(x)$ в точке x_0 . Поскольку x_0 — произвольная точка из $[a, b]$, отсюда и вытекает утверждение теоремы (1.17).

Теорема 1.18 *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема на этом отрезке, причём*

$$F'(x) = f(x)\,. \qquad (1.60)$$

Возьмём, как и ранее, произвольную точку $x_0 \in [a, b]$ и составим приращение ΔF . Имеем

$$\Delta F = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\Delta x\,, \quad \text{где} \quad c \in [x_0, x_0 + \Delta x]\,. \qquad (1.61)$$

При выводе (1.61) мы воспользовались теоремой о среднем, полагая $g(x) \equiv 1$. Из (1.61) следует, что

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(c)\,. \qquad (1.62)$$

Устремим теперь Δx к нулю. Поскольку $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, то $c \to x_0$, а тогда, в силу непрерывности $f(x)$, из (1.62) вытекает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)\,, \quad \text{т.е.} \quad F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Учитывая произвольность x_0 , мы и получим (1.60).

Равенство (1.60) означает, на самом деле, что функция $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тем самым мы установили, что **для всякой непрерывной на отрезке функции существует неопределённый интеграл**.

Перейдём теперь к центральной, в некотором смысле, теореме интегрального исчисления.

Теорема 1.19 (формула Ньютона–Лейбница) . *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *а* $\Phi(x)$ *— её* ***произвольная*** *первообразная на этом отрезке. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)\ . \tag{1.63}$$

Действительно, в силу условий нашей теоремы, учитывая (1.60), мы находим, что функция $F(x)$, задаваемая формулой (1.54), также является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$. По свойствам первообразных

$$F(x) = \Phi(x) + C\ . \tag{1.64}$$

Полагая $x = a$ в (1.64), получим

$$F(a) = 0 = \Phi(a) + C\ , \quad \text{откуда} \quad C = -\Phi(a)\ .$$

Тогда (1.64) примет вид

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)\ . \tag{1.65}$$

Полагая в (1.65) $x = b$ и учитывая, что $F(b)$ совпадает с нашим интегралом, мы и получим (1.63).

Для разности, стоящей в (1.63), используется специальное обозначение:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b\ .$$

С его использованием формула (1.63) принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b\ . \tag{1.66}$$

Эта формула названа по имени двух выдающихся математиков, открывших её, формулой Ньютона–Лейбница. Она устанавливает теснейшую связь между прежде обособленными понятиями определённого и неопределённого интегралов и позволяет с помощью неопределённого интеграла вычислять интеграл определённый.

Пример.

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\,.$$

Ранее мы изучали два метода вычисления неопределённого интеграла: замену переменной в интеграле и интегрирование по частям. Эти методы описаны в теоремах (1.1) и (1.2). С помощью формулы (1.66) их можно приспособить непосредственно для вычисления определённых интегралов.

Теорема 1.20 *Пусть* $f(x) \in C([a,b])$, *а* $\varphi(x) \in C^1([\alpha,\beta])$ *(т.е.* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *а* $\varphi(x)$ *имеет непрерывную производную на* $[\alpha,\beta]$ *). Пусть, далее,* $\varphi(x) \in [a,b]$ *для* $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$ *и* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx \tag{1.67}$$

Действительно, все подинтегральные функции, участвующие в (1.67), непрерывны в силу условий теоремы. Пусть $\Phi(u)$ — первообразная для $f(u)$ на отрезке $[a,b]$. Как и в теореме (1.1), мы убеждаемся, что $\Phi\big(\varphi(x)\big)$ — первообразная для $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a)\ ,$$

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \Phi\big(\varphi(\beta)\big) - \Phi\big(\varphi(\alpha)\big) = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

Отсюда и следует (1.67).

Теорема 1.21 *Пусть функции* $u(x), v(x) \in C^1([a,b])$.
Тогда

$$\int_a^b v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,. \tag{1.68}$$

В самом деле, интегрируя равенство (1.10) от a до b, учитывая, что $u(x)v(x)$ — одна из первообразных для $\big(u(x)v(x)\big)'$, и применяя формулу Ньютона–Лейбница, мы и получим (1.68).

Примеры.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} ,$$

$$\int_0^1 e^{-x} x\,dx = -\int_0^1 x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - \int_0^1 e^{-x}\,d(-x) =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} .$$

Рассмотрим тепеь функцию $f(x) \in C^\infty(U(x))$, т.е. функцию, обладающую производными всех порядков в некоторой окрестности точки x_0. Мы не предполагаем здесь, что окрестность $U(x_0)$ мала (не исключён случай, когда эта окрестность совпадает со всей числовой осью). Фиксируем произвольную точку $x \in U(x_0)$. Тогда, в силу формулы Ньютона–Лейбница, справедливо соотношение

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt ,$$

или

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt . \tag{1.69}$$

К интегралу, стоящему в правой части (1.69), применим несколько раз формулу интегрирования по частям.

Имеем

$$f(x) = f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t) = f(x_0) - f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,dt =$$

$$= \ldots = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{1.70}$$

К последнему интегралу в (1.70) применим теорему о среднем, где в роли функции f выступает $f^{(n+1)}$, а в роли g — функция $\frac{(x-t)^n}{n!}$. (Очевидно, все требования этой теоремы в нашем случае выполнены.)

$\exists\, c \in [x_0, x]$:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(c)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\,. \tag{1.71}$$

Комбинируя (1.70) и (1.71), мы приходим в итоге к следующей теореме.

Теорема 1.22 *Пусть функция $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$. Тогда при любом n и для любого $x \in U(x_0)$ справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \tag{1.72}$$

где $c \in [x_0, x]$.

Формула (1.72) носит название **формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**. Разумеется, число c в этой формуле зависит от x. Первая группа слагаемых в (1.72) есть не что иное, как хорошо нам знакомый многочлен Тейлора. Разница между формулой (1.72) и той формулой, которую мы изучали ранее, состоит лишь в форме записи **остаточного члена**, т.е. разности между функцией $f(x)$ и многочленом Тейлора. Если прежде мы знали, что остаточный член имеет вид $o[(x-x_0)^n]$, то в формуле (1.72) о нём содержится гораздо более подробная информация.

При решении ряда задач (отыскание площади бесконечной области, вычисление работы силы на бесконечном пути и т.п.) определённого выше интеграла оказывается не достаточно. Мы обобщим его, во-первых, на случай бесконечного промежутка и , во-вторых, на случай неограниченных функций.

Определение 1.7 *Пусть функция* $f(x) \in C([a,+\infty))$, *т.е. непрерывна на полуоси* $[a,+\infty)$. *Назовём* ***несобственным*** *интегралом от этой функции по данной полуоси следующую величину*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.73}$$

Если конечный предел в (1.73) существует, то интеграл называется ***сходящимся****, а его значение считается равным этому пределу, а если конечный предел не существует, то интеграл (1.73) называется* ***расходящимся*** *и ему не соответствует никакого числового значения.*

Поскольку для непрерывной функции на отрезке $[a,b]$ действует формула Ньютона–Лейбница, ясно, что такая же формула справедлива и для несобственного интеграла, если под значением первообразной в $+\infty$ понимать соответствующий предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) - \Phi(a)\,, \tag{1.74}$$

$$\text{где}\quad \Phi'(x) = f(x)\,.$$

Примеры.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 0-(-1) = 1\,,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty}\,.$$

Так как $\ln x$ не имеет конечного предела на $+\infty$, то последний интеграл расходится.

Рассмотрим теперь один важный для дальнейшего интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \,. \tag{1.75}$$

Мы уже видели, что при $p = 1$ интеграл (1.75) расходится. Пусть $p \neq 1$, тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} \,. \tag{1.76}$$

Ясно, что правая часть (1.76) существует при $p > 1$ и не существует при $p < 1$. Таким образом, интеграл (1.75) **сходится при** $p > 1$ **и расходится при** $p \leqslant 1$.

Подобно интегралу (1.73) можно определить и следующие интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx \,, \tag{1.77}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \,. \tag{1.78}$$

Причём, интеграл (1.78) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Определение 1.8 *Рассмотрим функцию* $f(x) \in \mathrm{C}\big((a, b]\big)$, *неограниченную в окрестности точки* a. *Назовём несобственным интегралом от* a *до* b *величину*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \,. \tag{1.79}$$

Как и в случае (1.73), интеграл (1.79) считается **сходящимся**, если соответствующий предел существует, и **расходящимся** в противном случае. Здесь тоже действует формула Ньютона–Лейбница, причём под значением первообразной $\Phi(x)$ в точке a понимается $\lim_{\delta \to 0+} \Phi(a+\delta)$.

Примеры.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2 \,,$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 \,.$$

Поскольку $\ln x$ не имеет конечного предела при $x \to 0+$, то последний интеграл расходится.

Наряду с интегралом (1.79) можно определить интеграл для случая, когда особая точка находится не на левом, а на правом конце отрезка или внутри него. Соответственно, от функции $f(x)$ мы требуем непрерывности на множестве $[a, b)$ или $[a, c) \cup (c, b]$. При этом соответствующие интегралы определяются как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \, , \tag{1.80}$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \, , \tag{1.81}$$

причём, в случае (1.81) для сходимости $\int_a^b f(x)\,dx$ требуется сходимость **обоих** интегралов в правой части этого равенства.

Как и ранее, можно и здесь обосновать применимость формулы Ньютона–Лейбница. Отметим также, что если применить, например, определение (1.80) к функции, которая интегрируема в обычном смысле на $[a, b]$, то в силу непрерывности интеграла по верхнему пределу мы придём к старому значению интеграла.

1.3 Приложения определённого интеграла.

Пусть $f(x) \in C\big([a, b]\big)$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Найдём площадь следующей фигуры (**криволинейной трапеции**).

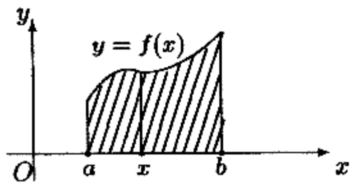

Рис. 1

При любом $x \in [a, b]$ рассмотрим площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена на участке $[a, x]$. Обозначим её через $S(x)$. Очевидно, $S(a) = 0$, $S(b) = S$ (площадь всей исходной трапеции).

Фиксируем произвольное $x_0 \in [a, b]$ и дадим x_0 приращение Δx. Тогда $S(x)$ получит приращение

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0) \, . \tag{1.82}$$

Ясно , что ΔS — это площадь узкой полоски, вырезанной из трапеции и расположенной на участке $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

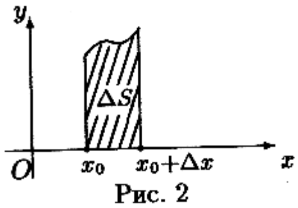

Рис. 2

Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, то она имеет на этом отрезке максимум и минимум, т.е.

$$\exists\, x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \Delta x] \ : \quad \forall\, x \in [x_0, x_0 + \Delta x] \quad f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)\ .$$

Рассмотрим два прямоугольника с высотой, соответственно, $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Очевидно, что площадь ΔS заключена между площадями этих прямоугольников

$$f(x_1)\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant f(x_2)\Delta x\ . \tag{1.83}$$

Положим для простоты в (1.83) $\Delta x > 0$. Тогда

$$f(x_1) \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant f(x_2)\ . \tag{1.84}$$

Устремим теперь Δx к нулю. Поскольку точки x_1 и x_2 принадлежат отрезку $[x_0, x_0 + \Delta x]$, они обе будут стремиться к x_0, а в силу непрерывности $f(x)$ левая и правая части равенства (1.84) будут стремиться к $f(x_0)$. По теореме о „ зажатой переменной“ из (1.84) следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0)\ ,$$

т. е.

$$S'(x_0) = f(x_0)\ .$$

В силу произвольности x_0 мы получаем, что на всём отрезке $[a, b]$

$$S'(x) = f(x)\ . \tag{1.85}$$

Проинтегрируем равенство (1.85) от a до b:

$$\int_a^b S'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

или

$$S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.86}$$

Но, как отмечалось выше, $S(a) = 0$, а значение $S(b)$ совпадает с площадью нашей криволинейной трапеции. Поэтому из (1.86) вытекает формула

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.87}$$

Рассмотрим несколько более общий случай криволинейной трапеции вида

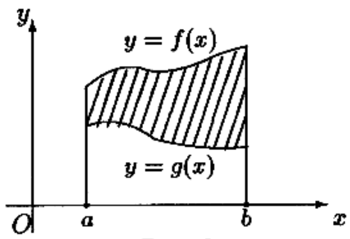

Рис. 3.

где $f(x),\ g(x) \in \mathrm{C}([a,b])$. Кроме того, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ на $[a,b]$.

Ясно, что площадь такой трапеции равна разности площадей двух трапеций предыдущего типа, одна из которых ограничена графиком $y = f(x)$, а другая — графиком $y = g(x)$. Таким образом, мы приходим к следующей формуле для площади S нашей трапеции

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,. \tag{1.88}$$

Формула (1.88) сохраняется и в случае, если мы отбросим требование неотрицательности $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$. Действительно, учитывая ограниченность f и g на $[a,b]$, мы можем выбрать столь большое число A, чтобы функции $f(x) + A$ и $g(x) + A$ оказались положительными. Соответствующая криволинейная трапеция получится из нашей параллельным сдвигом вдоль оси OY, который, как известно, не изменяет площади фигур. Но если мы применим (1.88) к новой трапеции, то увидим, что

$$S = \int_a^b [(f(x) + A) - (g(x) + A)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,,$$

так что мы снова приходим к формуле (1.88).

Рассмотрим теперь снова трапецию, изображённую на рис.1, и будем вращать её как жёсткую пластинку вокруг оси OX. В результате возникнет некое пространственное тело, называемое телом вращения. Наша задача — вычислить объём V_{ox} такого тела. Как и в задаче с площадью, введём функцию $V(x)$, равную объёму тела, которое получается при вращении части трапеции, расположенной на участке $[a,x]$. Ясно, что $V(a) = 0$ и $V(b) = V_{ox}$.

Снова фиксируем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и дадим аргументу приращение Δx. При этом объём изменится на величину

$$\Delta V = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) . \tag{1.89}$$

Величина (1.89) представляет собой объём тела, полученного при вращении тонкой полоски, изображённой на рис.2. Как и прежде, мы выбираем на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ точки x_1, x_2 и заключаем нашу полоску между двумя прямоугольниками с высотами, соответственно, $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Тогда ΔV окажется заключённым между двумя объёмами, порождёнными этими прямоугольниками, т. е. объёмами двух прямых круговых цилиндров. Таким образом,

$$\pi f^2(x_1)\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant \pi f^2(x_2)\Delta x , \tag{1.90}$$

или ($\Delta x > 0$)

$$\pi f^2(x_1) \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant \pi f^2(x_2) . \tag{1.91}$$

Устремляя опять Δx к нулю и учитывая непрерывность $f(x)$ и произвольность x_0, мы приходим к формуле

$$V'(x) = \pi f^2(x) . \tag{1.92}$$

Интегрируя (1.92) от a до b, мы приходим к окончательному результату

$$V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx . \tag{1.93}$$

Если мы будем вращать нашу трапецию вокруг оси OY, то получим ещё одно тело вращения с объёмом V_{oy}. (В этом случае мы потребуем, чтобы отрезок $[a,b]$ располагался на положительной полуоси.) Здесь тело, получающееся при вращении узкого прямоугольника вокруг оси OY, представляет собой полый цилиндр. Поэтому, поступая так же, как и ранее, мы вместо (1.90) получим оценку

$$\pi(x_0 + \Delta x)^2 f(x_1) - \pi x_0^2 f(x_1) \leqslant \Delta V \leqslant \pi(x_0 + \Delta x)^2 f(x_2) - \pi x_0^2 f(x_2) , \tag{1.94}$$

откуда после очевидных преобразований мы приходим к соотношению

$$2\pi x_0 f(x_1) + \pi f(x_1)\Delta x \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant 2\pi x_0 f(x_2) + \pi f(x_2)\Delta x . \tag{1.95}$$

Переходя в (1.95) к пределу при Δx, стремящемся к нулю, и учитывая произвольность x_0, мы получим

$$V'(x) = 2\pi x f(x) . \tag{1.96}$$

Интегрируя (1.96) от a до b, приходим к окончательной формуле

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx . \tag{1.97}$$

Заметим, что если отрезок $[a, b]$ расположен на отрицательной полуоси, то (1.97) нужно заменить на следующую формулу:

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b |x| f(x)\, dx . \tag{1.98}$$

Приведём без доказательства ещё одну формулу для вычисления объёма. Пусть некое тело располагается вдоль оси OX на участке $[a, b]$. Пусть далее нам известна при любом $x \in [a, b]$ площадь сечения $S(x)$ нашего тела плоскостью, проходящей через точку x и перпендикулярной оси OX. Тогда объём данного тела равен

$$V = \int_a^b S(x)\, dx . \tag{1.99}$$

Это так называемая формула вычисления объёма тела **по поперечным сечениям**.

Перейдём теперь к вопросу о вычислении длины дуги некоторой кривой. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ и возьмём кусок её графика, располагающийся над отрезком $[a, b]$. Такой кусок мы будем называть **дугой** и обозначать $\smile{AB}$.

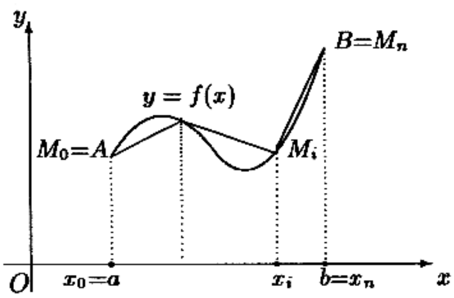

Рис. 4.

Выберем на этой дуге конечное множество точек $M_0 = A$, M_1, M_2, ..., $M_n = B$ и соединим соседние точки прямолинейными отрезками. В результате мы получим ломаную линию с теми же концами A, B, что и наша дуга; обозначим длину этой ломаной через $\widehat{l}_{AB}$. (Разумеется, $\widehat{l}_{AB}$ зависит от выбора точек M_i.) Длину максимального звена ломаной обозначим через ρ.

Определение 1.9 *Длиной дуги* $\breve{AB}$ *называется величина* l_{AB}, *равная*

$$l_{AB} = \lim_{\rho\to 0} \widehat{l}_{AB} , \tag{1.100}$$

что означает следующее:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall \{M_i\} : \rho < \delta$$

выполняется неравенство $|\widehat{l}_{AB} - l_{AB}| < \varepsilon$.

Можно заметить, что определение предела (1.100) вполне аналогично введённому ранее пределу интегральных сумм. Только теперь разбивается дуга $\breve{AB}$, а не отрезок числовой оси, и отсутствуют промежуточные точки.

Следует обратить внимание на то, что для произвольной непрерывной функции $f(x)$ величина l_{AB} не обязана существовать. Если она существует, то дуга называется **спрямляемой**. В противном случае она будет неспрямляемой. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1.23 *Пусть* $f(x) \in C^1([a,b])$. *Тогда соответствующая дуга* $\breve{AB}$ *спрямляема и её длина вычисляется по формуле*

$$l_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{1.101}$$

В самом деле, возьмём произвольный набор точек $\{M_i\}$ и спроектируем эти точки на ось OX. В результате на отрезке $[a,b]$ возникнет разбиение T, состоящее из проекций x_i точек M_i. Очевидно диаметр такого разбиения удовлетворяет оценке $\lambda(T) \leqslant \rho$, поскольку длина любого отрезка не меньше длины его проекции на ось OX. Подсчитаем теперь длину одного звена $M_{i-1}M_i$ нашей ломаной. Имеем

$$\begin{aligned} M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \\ = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i . \end{aligned} \tag{1.102}$$

Здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а к приращению Δy_i мы применили формулу Лагранжа, что законно в силу условия нашей теоремы. Пользуясь (1.102), мы находим длину всей ломаной

$$\widehat{l}_{AB} = \sum_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i . \tag{1.103}$$

Отметим, что (1.103) является ни чем иным, как интегральной суммой функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на $[a,b]$. Устремим теперь ρ к нулю. Тогда и $\lambda(T) \to 0$, а в силу непрерывности $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ интегральная сумма (1.103) будет стремиться к своему интегралу, откуда и следует формула (1.101).

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении работы, совершаемой переменной силой на прямолинейном участке пути. Если в каждой точке оси OX на материальную точку действует сила, направленная вдоль OX, то эту силу можно охарактеризовать алгебраической величиной $F(x)$. Можно, переходя на „ физический уровень строгости", считать, что при смещении нашей точки вдоль „ бесконечно малого пути" dx величина $F(x)$ не меняется, и поэтому совершённая элементарная работа равна $F(x)\,dx$. Если теперь наша элементарная точка переместилась от начального положения a до конечного положения b, то поле сил совершило при этом работу, равную

$$A = \int_a^b F(x)\,dx\,. \tag{1.104}$$

Пусть в небольшом шарике проделано отверстие и этот шарик посажен на гладкий стержень, так что он может смещаться только вдоль этого стержня. Прикрепим к шарику пружинку и будем считать, что шарик первоначально находится в положении равновесия. Выясним, какую нужно затратить работу, чтобы переместить шарик из положения равновесия на расстояние a.

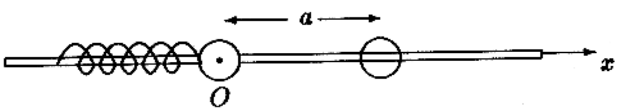

Рис. 5.

Направим ось OX вдоль стержня, а точку, где центр шарика располагается в положении равновесия, примем за начало координат.

Как известно из механики (закон Гука), при смещении шарика из положения равновесия на небольшое расстояние, на шарик со стороны пружины будет действовать упругая сила, пропорциональная смещению и направленная в сторону, противоположную смещению. При нашем выборе оси OX эта сила характеризуется своей алгебраической величиной

$$F(x) = -kx \tag{1.105}$$

Применяя к (1.105) формулу (1.104), мы получим, что работа, совершённая упругой силой, равна

$$A = -k\int_0^a x\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = -\frac{ka^2}{2}\,. \tag{1.106}$$

Работа (1.106) получилась отрицательной, так как перемещение шарика происходило против поля сил. Соответственно, нам для преодоления сопротивления пружины придётся совершить такую же работу, но с положительным знаком.